

Harry Potter trifft Alice im Wunderland der Mathematik

Annalina Vorbau

Ulrich Eckhardt

29. August 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Was hat Harry Potter mit Mathematik zu tun?	2
2	Spiele	4
2.1	Ein Spiel von Lewis Carroll	5
2.2	Sudoku	7
3	Ein Zwerg verschwindet	12
4	Topologische Spiele	14
4.1	Möbius-Bänder	14
4.2	Irrgärten	16
	Literatur	17

Bevor ich meinen Vortrag beginne, möchte ich Euch meine Mitarbeiterin Annalina Vorbau vorstellen. Sie ist Expertin für Harry Potter und für Alice im Wunderland. Sie hat mir auch wertvolle Ratschläge geben können, was mathematische Spiele anbelangt, denn sie ist sehr gut in Mathematik. Annalina ist meine Enkeltochter und jetzt elf Jahre alt, also genauso alt wie Harry Potter in dem Buch *Harry Potter und der Stein der Weisen* [11, S. 51].

Vortrag am 8. August 2007 im Rahmen der Veranstaltungsreihe „Kinder Uni Sylt 2007“. kunst:raum sylt quelle.

1 Was hat Harry Potter mit Mathematik zu tun?

Immer, wenn ich irgendwo sage, daß ich Mathematiker bin, dann erschrecken die Menschen, sie sagen, daß sie in der Mathematik schon immer schlecht waren oder sie fragen mich, was denn ein Mathematiker eigentlich den ganzen Tag über tut. Schließlich weiß man doch schon immer, daß zwei mal zwei vier sei, wozu braucht man dann noch Mathematiker? Rechnen die vielleicht jeden Tag nach, ob immer noch zwei mal zwei vier ist?

Man könnte sagen, daß Mathematiker sehr nützliche Menschen sind. Fast alles, was uns umgibt, hat mit Mathematik zu tun, vom MP3-Player bis zum Airbus. Als am 27. April 2005 der erste Versuchsflug eines Airbus A380 stattfand, mußte der Testpilot sicher sein, daß das Flugzeug auch wirklich fliegen würde. Vielleicht habt Ihr die erste Landung des A380 in Hamburg-Finkenwerder am 8. November 2005 miterlebt. Man kann so etwas nicht „ausprobieren“, das wäre riskant für die Testpiloten und außerdem sehr teuer. Der Pilot konnte diese Sicherheit haben, denn bevor das Versuchsflugzeug gebaut wurde, hatte man in zahlreichen Berechnungen ausprobiert, wie es sich bei jeder nur denkbaren Flugsituation verhalten würde. Die Methoden, die man dabei benutzt, sind von Mathematikern entwickelt worden. Nun muß ich hier gestehen: Wir Mathematiker sind eigentlich recht faul. Wir rechnen nicht gerne, und tatsächlich waren an den Berechnungen zum Airbus kaum Mathematiker aber viele Ingenieure beteiligt. Uns genügt es meist, zu wissen, wie es geht!

Nützliche und wichtige Mathematik ist recht schwierig und kann zuweilen auch etwas langweilig werden. Was tun Mathematiker, wenn sie einmal nicht an wichtigen Dingen arbeiten? Ich will es hier verraten: Sie spielen und sie zaubern! Dies klingt vielleicht unglaublich, aber es ist doch richtig. Bevor ich einige Beispiele bringe, möchte ich einmal einige Ähnlichkeiten zwischen Harry Potter und den Mathematikern nennen:

1. Wir begegnen Harry Potter immer wieder in Hogwarts, dem Internat für Zauberer. Obwohl er ein geborener Zauberer ist, und noch dazu ein überaus begabter, muß er eine sehr große Anzahl von Dingen lernen. Auch wir Mathematiker müssen zunächst einmal viel lernen, und wir lernen eigentlich unser ganzes Leben lang. Dies hat zur Folge, daß es schwierig ist, jemanden, der dieses Wissen nicht hat, etwas zu erklären. Harry Potter kann einem Muggel nicht erklären, wie man zaubert, und wenn Ihr alle Bücher von Harry Potter gelesen habt, könnt Ihr noch lange nicht zaubern. So ähnlich geht es uns Mathematikern, wenn wir Mathematik-Muggeln erklären möchten, wie schön Mathematik ist. Wir müssen uns viel Mühe geben, wir können einiges zeigen, aber die schönsten Dinge kann man nur dann verstehen, wenn man durch eine lange Schule gegangen ist.

In den Romanen über Harry Potter ist immer wieder die Rede davon, daß Harry Bücher in alten Sprachen lesen muß. Ein Unterrichtsfach auf der Fächerliste ist beispielsweise *Alte Runen* [13, 260] und es heißt auf S. 263: „Einsam in einer Ecke saß Hermine und las ein Buch mit dem Titel *Alte Runen leicht gemacht*.“ Auch wir Mathematiker lesen gern in alten Büchern, und das älteste Buch, welches ich kenne, wurde vor mehr als 3 500 Jahren in Ägypten geschrieben. Es liegt als *Papyrus Rhind* im Britischen Museum [10]. Die Papyrusrolle beginnt mit den Worten:

Genaueres Rechnen. Einführung in die Kenntnis aller existierenden Gegenstände und aller dunklen Geheimnisse.

Das klingt doch nun schon sehr nach Zauberei, es handelt sich aber um nicht mehr und nicht weniger als um ein Mathematiklehrbuch! Ihr erinnert Euch sicherlich daran, daß in

dem Roman *Der Gefangene von Askaban* die Familie Weasley einen Urlaub in Ägypten macht, um dort die Geheimnisse der altägyptischen Kultur zu studieren [12, S. 12 ff].

Es gibt sogar Bücher, in denen von Zauberei und von Mathematik die Rede ist, etwa in einem Buch welches 1745, also vor über 250 Jahren, erschienen ist [1]. Dort heißt es im Titel:

Natürliches Zauber – Buch Oder : Neu – eröffneter Spiel – Platz rarer Künste / in welchem nicht allein alle Taschen – Spieler – und andere curiöse Mathematische und Physicalische Künste sondern auch die gebräuchlichen Karten – Würffel Billard und andere Spiele, aufs genaueste beschrieben, und mit vielen Figuren erläutert werden.

Ein ganz modernes Beispiel für die engen Zusammenhänge von Mathematik und Zauberei ist das Buch *Mathematik und Magie* von Martin Gardner [8].

2. Harry Potter muß Spielregeln einhalten. So ist es ihm nicht erlaubt, außerhalb von Hogwarts zu zaubern. Er erhält einen Brief mit der Ermahnung [13, S. 25]:

Sehr geehrter Mr Potter,
wie uns zur Kenntnis gelangt ist, wurde an Ihrem Wohnort heute Abend um zwölf Minuten nach neun ein Schwebezauber verwendet.

Wie Sie wissen, ist es minderjährigen Zauberern nicht gestattet, außerhalb der Schule zu zaubern. Weitere Zaubertätigkeit Ihrerseits kann zum Verweis von besagter Schule führen (Erlass zur Vernunftgemäßen Beschränkung der Zauberei Minderjähriger, 1875, Abschnitt C).

Wir möchten Sie zugleich daran erinnern, dass jegliche magische Tätigkeit, die den Mitgliedern der nichtmagischen Gemeinschaft (Muggel) aufzufallen droht, gemäß Abschnitt 13 des Geheimhaltungsabkommens der Internationalen Zaubereervereinigung ein schweres Vergehen ist.

Genießen Sie Ihre Ferien!

Hochachtungsvoll,

Mafalda Hopfkirch

Abteilung für unbefugte Zauberei

Zaubereiministerium

Auch wir Mathematiker sind an Spielregeln gebunden. Diese Regeln machen wir meistens selbst. Wichtig ist, daß wir sie unbedingt einhalten, auch wenn das nicht immer einfach ist.

3. Harry Potter lebt in verschiedenen Welten, in der Alltagswelt bei den Dursleys im Listerweg 4 [11, S. 5] und in der magischen Welt, deren Spielregeln von denen der Alltagswelt vollkommen verschieden sind. Auch wir Mathematiker befassen uns immer wieder mit der Frage: *Wie würde die Welt aussehen, wenn sie nicht so aussähe, wie sie aussieht?* Ein bekanntes und populäres Beispiel hierfür ist Albert Einstein. Er hat sich gefragt, wie die Welt beschaffen sein müßte, wenn sie so aussähe, wie sie die Physiker in ihren Lehrbüchern beschreiben. Dazu studierte er jahrelang die sogenannten Maxwellschen Gleichungen (Abbildung 1). Euch werden diese Gleichungen ebenso wenig etwas sagen, wie ein Blick auf einen altägyptischen Papyrus. Man muß eben die „Sprache“ dieser Gleichungen lernen und muß die „Spielregeln“ zu ihrer Interpretation kennen. Hierfür benötigte Albert Einstein sehr viel Phantasie – so viel wie Harry Potter – und er benötigte Disziplin: Seine größte Schwierigkeit war es, die Spielregeln auch wirklich immer exakt einzuhalten, sich also zum Beispiel immer wieder genau vorzustellen, wie es ist, wenn die Lichtgeschwindigkeit nicht

überschritten werden darf. Bemerkenswert ist, daß er zu seinen Forschungen kein Labor benutzte, er stellte die Relativitätstheorie in seinem Kopfe auf. Deshalb war für ihn diese Disziplin ungeheuer wichtig, er durfte niemals, und wenn auch nur „aus Versehen“ gegen seine eigenen Gesetze verstoßen.

$$\begin{array}{ll}
 \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} & \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} & \frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} & \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \\
 \\
 \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 & \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0
 \end{array}$$

Abbildung 1: Die Maxwellschen Gleichungen.

2 Spiele

Ich hatte eingangs erwähnt, daß Mathematiker gern spielen. Tatsächlich gibt es eine große Anzahl von Spielen, die von Mathematikern erfunden wurden und es gibt auch sehr viele Bücher von Mathematikern, in denen Spiele vorgestellt werden. Besonders zu erwähnen ist hier Martin Gardner, der für die Zeitschrift *Scientific American* (deutsch als *Spektrum der Wissenschaft*) über lange Jahre hinweg für die Serie *Mathematical Games* (*mathematische Spielereien*) verantwortlich war. Er hat eine große Anzahl von Büchern über mathematische Spiele [7] und Zaubereien [8] geschrieben. Andere Bücher über mathematische Spiele stammen etwa von Conway [4] oder von Olivastro [9]. In dem schon erwähnten *Papyrus Rhind* findet man neben „wichtigen“ Aufgaben über Wirtschaftsmathematik und Feldvermessung auch mathematische Spiele. Übrigens, auch Harry Potter spielt gern, nicht nur Quidditch, im *Stein der Weisen* muß er ein Rätselspiel lösen, was ihm nur unter Mithilfe von Hermine gelingt [11, S. 309 f]. In dem Buch *Alice hinter den Spiegeln* ist die Handlung ein Teil eines Schachspiels, und die Figuren spielen Spiele im Spiel [3].

In vielen Fällen haben wir das große Glück, daß unsere Spiele für andere sehr wichtig werden. Es gibt ein ganzes Teilgebiet der Mathematik, welches den Namen *Spieltheorie* trägt. Wie Ihr sicher wißt, gibt es für Mathematik keinen Nobelpreis. Es gibt aber dennoch eine Anzahl von Mathematikern, die einen Nobelpreis erhalten haben, und zwar auf dem Gebiete der Wirtschaftswissenschaften. Die Wirtschaftswissenschaftler sind nämlich an Spielen als Modellen für Wirtschaftsabläufe sehr interessiert. Einer der bedeutendsten Mathematiker, der sich mit Spieltheorie befaßte, war John Nash, der 1994 den Nobelpreis erhielt. Ihr seht, es kann sehr nützlich sein, wenn man sich mit Spielen beschäftigt!

Häufig sind unsere Spiele sehr einfach. Wir Mathematiker wissen natürlich, daß im „wirklichen Leben“ die Dinge nicht so einfach sind, wie in unseren Spielen, aber wir sind einfache Menschen, wir können komplizierte Dinge nicht verstehen, und daher versuchen wir es zuerst immer einmal am einfachsten Beispiel.

Die Informatiker versuchen, Computer zu bauen, die auf wichtige Fragen Antworten geben können. Zum Beispiel gibt es Diagnosecomputer, die dem Arzt helfen, eine Krankheit richtig zu bestimmen. Ein solcher Computer erhält sämtliche Daten über den Patienten und schließt dann auf dessen Gesundheitszustand. So etwas ist für uns Mathematiker zu kompliziert, wir fragen uns vielmehr, ob ein Computer auf jede Frage eine Antwort geben kann oder umgekehrt, ob es Fragen gibt, auf die weder ein Computer noch ein Mensch eine Antwort geben kann. Tatsächlich gibt es solche Fragen, und für einen Informatiker, der einen „intelligenten“ Computer bauen möchte, ist es wichtig, zu wissen, daß es für dessen Fähigkeiten Grenzen geben muß. Eine der allereinfachsten Fragen, die sich nicht beantworten lassen, ist, die Frage, ob der Satz in Abbildung 2 richtig oder falsch ist. Die Antwort ist komplizierter, als man auf den ersten Blick vermuten möchte. Wäre der Satz nämlich richtig, dann müßte er falsch sein, denn genau das besagt er ja. Andererseits, wenn er falsch wäre, dann müßte er richtig sein, denn er besagt ja, daß er falsch sei, wenn diese Aussage aber falsch sein soll, dann muß doch der Satz richtig sein, oder? Wir kommen also zu dem Schluß, daß der Satz in Abbildung 2 weder richtig noch falsch ist.

Dieser Satz ist falsch!

Abbildung 2: Beispiel einer Aussage, die weder wahr noch falsch sein kann.

Wir können aus dem einfachen Satz ein kleines Spiel machen. Wir wissen, daß Ron Weasley in den Harry-Potter-Büchern häufig erst handelt, und dann nachdenkt. Nehmen wir an, er hätte sich mit Hermine Granger gestritten und gesagt: „Was Hermine sagt, ist falsch!“ Hermine ist sehr intelligent und auch sehr beherrscht. Sie würde niemals auf eine solche Anschuldigung mit: „Was Ron sagt, ist auch falsch!“ antworten, denn das wäre töricht. Sellt Euch vor, sie würde sagen: „Was Ron sagt, ist richtig!“ Wenn Ihr einmal ein wenig Zeit habt und sonst nichts Spannendes zu tun, dann denkt einmal über diese beiden Sätze nach. Kann einer von ihnen falsch sein? Oder kann einer von beiden Sätzen richtig sein?

2.1 Ein Spiel von Lewis Carroll

Nun wollen wir uns einem spannenderen Spiel zuwenden. Das Buch über Alice im Wunderland [3] hat ein Mathematiker unter dem Künstlernamen Lewis Carroll geschrieben. Sein eigentlicher Name war Charles Lutwidge Dodgson (1832 – 1898). Lewis Carroll war Professor für Mathematik, der auch „seriöse“ Fachbücher geschrieben hat. Er erzählte kleinen Mädchen aus seiner Bekanntschaft gern mathematische Geschichten und führte kleine Tricks vor. Warum Mädchen? Nun, Mädchen eignen sich besser für Mathematik als Jungen, sie sind – normalerweise – ordentlicher, sorgfältiger und sie halten Spielregeln ein. Ich weiß das von meiner Mitarbeiterin und Enkeltochter Annalina. Ihr wißt sicher, daß Hermine in Harrys Klasse genau aus den von mir genannten Gründen die Beste ist.

Nun zu einem Spiel von Lewis Carroll. Er zeichnete eine einfache Figur (siehe Abbildung 3) und bat, diese in einem Zug nachzuzeichnen, wobei gefordert wird, daß die gezeichnete Linie sich nicht

selbst überkreuzt [7, S. 95 f]. Wohlgemerkt, jede Linie der Figur soll dabei einmal und nur einmal durchlaufen werden. Einzelne Punkte dürfen beliebig oft getroffen werden, der Weg darf sich nur nicht kreuzen. Wenn ich Euch jetzt einige Minuten Zeit ließe, könntet Ihr sicher herausfinden, ob das möglich ist und wie man das macht. Ich hatte schon erwähnt: Mathematiker sind recht faule Menschen, sie handeln nicht gern, sie denken nur darüber nach, was sie täten, wenn sie handeln würden. Dies ist auch der Grund, warum Mathematiker nicht wirklich zaubern, sie wollen nur wissen, wie das geht. Auch hier, in unserem Beispiel, ist dies so.

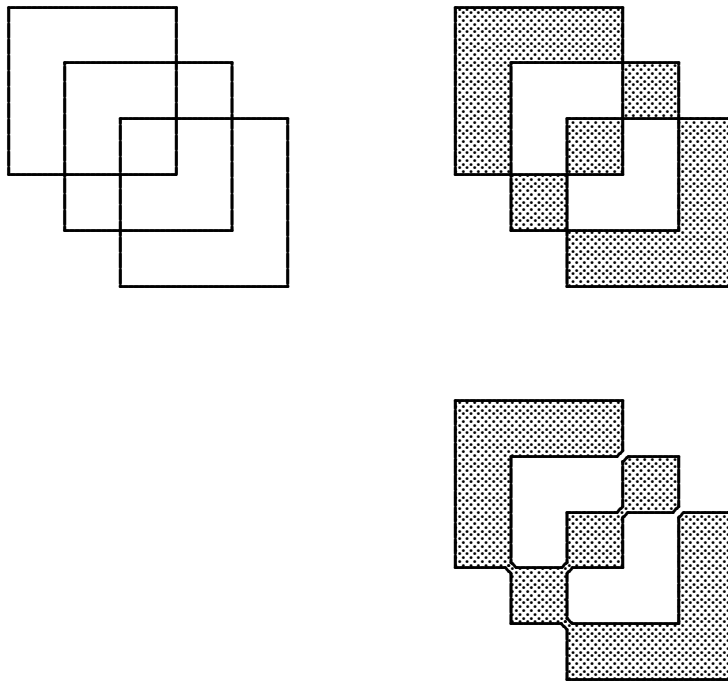


Abbildung 3: Lewis Carolls Problem mit drei Quadraten

Was wir jetzt benötigen, ist eine Idee. Eine solche Idee wäre es, die Figur auszumalen, so daß jede durch die Linien gebildete Fläche entweder ausgemalt ist oder frei bleibt und zwei über eine Linie angrenzende Flächen niemals beide ausgemalt sind oder beide freigeblieben. Dabei soll jede Linie der Figur eine ausgemalte Fläche beranden. Wenn man einfach anfängt, dann sieht man, daß dies ohne Schwierigkeiten geht. Nun vergessen wir die Linien und versuchen, den Rand der ausgemalten Fläche in einem Zuge und überkreuzungsfrei nachzuziehen. Da das an den Kreuzungspunkten nicht eindeutig geht, mogeln wir ein ganz klein wenig. Wir stellen uns vor, daß die ausgemalte Fläche eine Insel sei. Wir wollen zunächst, daß eine Figur entsteht, die keine „Binnenseen“ hat, das heißt, nicht ausgemalte Flächen, die keinen Zugang zum umgebenden Meer haben. Dazu radieren wir etwas von denjenigen Kreuzungspunkten weg, die die freie Durchfahrt behindern. Dabei müssen wir aufpassen, daß es bei einer Insel bleibt. Wenn wir zu viele Kreuzungspunkte wegradieren, zerfällt die Insel in mehrere Inseln. Wer genau hinsieht, wird bemerken, daß diese Mogelei auf verschiedene Weisen geht. Wir legen uns aber jetzt auf eine davon fest. Die restlichen Kreuzungspunkte machen wir ein wenig dicker, so daß immer nur eine eindeutige Entscheidung

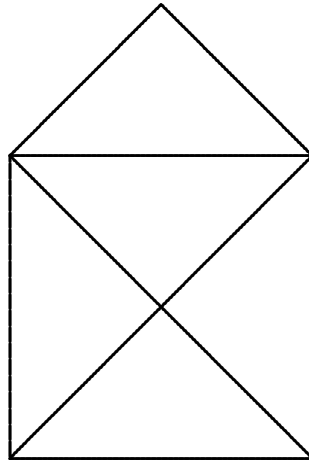


Abbildung 4: Dies ist das Haus vom Nikolaus.

über die Randlinie möglich ist. Wie man sieht, ist dies alles einfacher, als ich es beschrieben habe. Es ist für die „gemogelte“ Figur sehr einfach, den Rand in einem Zuge zu umfahren. Man folgt dazu einfach der „Küstenlinie“ der Insel. Damit hat man aber auch eine Lösung für die ursprüngliche Figur gefunden, man muß nur die „Mogeleien“ wieder rückgängig machen.

So einfach war das! Ein Mathematiker hört hier auf, er wird nicht versuchen, den Weg wirklich anzugeben, da er ja überzeugt ist, daß die Methode richtig ist. Was an diesem kleinen Beispiel interessant ist, sind die Fragen, die ich gar nicht aufgeworfen habe:

- Kann man jede Figur wie beschrieben ausmalen? Offenbar nicht, denn sonst wäre jede noch so komplizierte Anordnung von Linien in einem Zuge nachzeichnenbar, und das ist doch wohl nicht wahr! Wir kennen alle die bekannte Figur „das Haus vom Nikolaus“ (siehe Abbildung 4). Bei dieser funktioniert die Methode nicht. Warum? Nun, bei dieser Figur dürfen sich die Linien überkreuzen, und dann ist alles ganz anders.
- Durch meine „Mogeleien“ ändere ich die Aufgabe. Das heißt, ich nehme eine nicht ganz einfache Aufgabe her und ändere sie so, daß sie einfach wird. Darf ich das?
- Kann man das immer so machen? Damit Ihr testen könnt, ob Ihr alles verstanden habt, versucht doch einmal, die Figur aus drei Kreisen in Abbildung 5 nach dieser Methode in einem Zuge nachzuzeichnen. Diese Figur stammt von T. H. O’Beirne [7, S. 94].

2.2 Sudoku

Man findet heute in fast jeder Zeitung Sudokus. Meine Mitarbeiterin Annalina löst gelegentlich ein solches Rätselspiel. Fast immer wird in den Zeitungen darauf hingewiesen: „Ein Mathematik-Ass müssen Sie für Sudoku nicht sein – cleveres Kombinieren ist hier gefragt“. Ich weiß nicht, was sich die Journalisten unter Mathematik vorstellen, jedenfalls ist „cleveres Kombinieren“ eine sehr gute Beschreibung mathematischer Tätigkeit. Es gibt sehr ernsthafte Mathematiker, die vorschlagen,

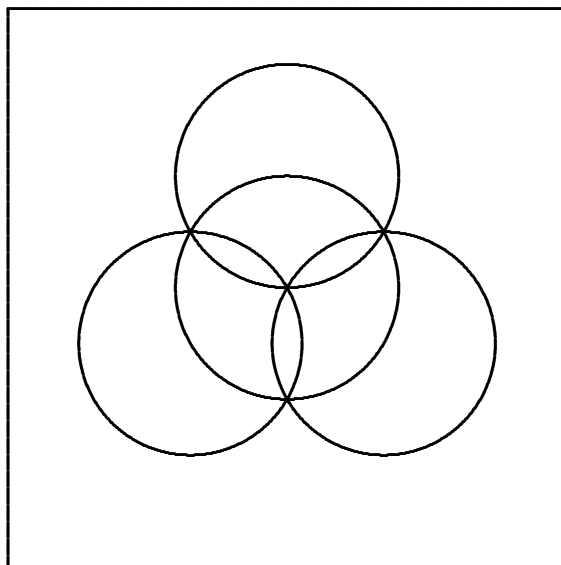


Abbildung 5: O'Beirnes Problem mit vier Kreisen

Sudoku im Mathematik-Unterricht zu behandeln [6, 5]. Was interessiert uns Mathematiker an einem solchen Spiel? Nun, einmal kann man hier sehr schön studieren, wie man Regeln zur Lösung finden kann. Noch interessanter ist es, sich zu fragen, ob diese Regeln immer zum Ziel führen.

Man könnte sich etwa vornehmen, ein Programm zu entwerfen, welches Sudokus löst. Wenn man weiß, wie ein solches Programm aussehen würde, dann wäre es nicht mehr sehr spannend, ein soches Programm wirklich zu schreiben. Stellt Euch vor, Harry Potter wüßte einen Zauberspruch, der bewirkt, daß ein Sudoku oder ein anderes Spiel sofort gelöst würde. Das wäre ja dann recht langweilig, einfach immer nur den Zauberspruch aufzusagen.

Ihr kennt sicher alle die Spielregeln des Sudoku. In einem Feld von $9 \times 9 = 81$ Kästchen sind einige dieser Kästchen mit Ziffern zwischen 1 und 9, besetzt. Die noch freien Felder sind so aufzufüllen, daß in jeder Zeile und jeder Spalte sowie in jedem der markierten Unterquadrate, die aus 3 mal 3 Kästchen bestehen, alle Ziffern von 1 bis 9 genau einmal vorkommen. In Abbildung 6 ist ein solches Sudoku angegeben. Es stammt aus der Zeitung *Times* und wurde als besonders schwer klassifiziert. In diesem Sudoku sind 24 Ziffern vorgegeben, wir haben also $81 - 24 = 57$ Ziffern zu ermitteln.

Wie könnte man sich ein Programm, das ein Sudoku löst, vorstellen? Ein Computer ist genau das Gegenteil eines Mathematikers, er ist nicht besonders klug, man muß ihm jeden Schritt vorschreiben, aber er ist ungeheuer fleißig und sehr schnell. Wir weisen unseren Computer nun an, in jedes noch nicht besetzte Feld erst einmal alle Ziffern von 1 bis 9 einzutragen. Danach soll der Computer in jedem solchen Feld alle diejenigen Ziffern löschen, die nach den Sudoku-Regeln in diesem Feld nicht stehen dürfen. Ich möchte diese Methode die *Sherlock-Holmes-Methode* nennen. Sherlock Holmes war häufig recht ungehalten über die Begriffsstutzigkeit seines Partners Dr. Watson. So sagt er in dem Roman *Im Zeichen der Vier* zu Watson:

Wie oft habe ich es Ihnen gesagt, daß, wenn Sie das Unmögliche ausgeschlossen haben, was übrigbleibt, so unwahrscheinlich es auch scheinen mag, die Wahrheit sein muß?

				3		7		9
	4				8			
2		7						
	3			9	5		8	
6								2
	1		2	8			3	
						5		8
			1				9	
4		3		2				

Abbildung 6: Beispiel-Sudoku.

Dieses Sudoku erschien in der *Times* vom 23. Juli 2005. Es wurde dort als „Fiendish“ klassifiziert, also als „teuflisch“ oder „höllisch“.

Wir schließen also in unserem Programm erst einmal das Unmögliche aus. In Abbildung 7 ist das Ergebnis dieses ersten Schrittes des Computers dargestellt. Zum Beispiel darf in dem linken oberen Feld keine 2 stehen, denn diese kommt in der linken Spalte bereits vor. Ebenso darf keine 3 in dem Feld stehen, denn in der ersten Zeile finden wir eine 3. Es gibt gleich zwei Gründe dafür, daß in dem linken oberen Feld keine 4 stehen darf: Einmal kommt die 4 schon in dem linken oberen 3×3 -Quadrat und zum anderen in der ersten Spalte vor. Wie man weiter sieht, darf auch keine 6 und keine 7 vorkommen sowie keine 9. Es bleiben also nur die Ziffern 1, 5 und 8.

Auf die gleiche Weise verfahren wir mit den anderen Kästchen. Ich gebe zu, daß dies eine etwas langwierige (und auch langweilige) Methode ist, aber wir denken ja an ein Computerprogramm, und der Computer soll ruhig etwas arbeiten. Worauf es uns ankommt, ist nicht, eine möglichst einfache Methode zu finden, sondern eine Methode, die sicher zur Lösung führt.

Wir schauen uns nun Abbildung 7 genauer an. Als erstes fällt uns auf, daß in der vierten Zeile im ersten Kästchen nur eine einzige Ziffer steht, eine 7. Nach Sherlock Holmes können wir schließen, daß in diesem Kästchen eine 7 stehen muß.

In dem zweiten oberen 3×3 -Quadrat ist nur eine einzige 2 zu finden, nämlich im sechsten Kästchen der ersten Zeile. Das bedeutet aber, daß in diesem Kästchen eine 2 stehen muß. Auch hier argumentieren wir wieder mit Sherlock Holmes: In keinem anderen Kästchen des Quadrats kann eine 2 stehen, also muß das Kästchen, welches übrigbleibt, das wahre Kästchen für die 2 sein.

In Tabelle 1 sind die ersten Schritte zur Lösung des Sudokus aufgelistet. Die einzelnen Kästchen

1 5 8	5 6 8	1 5 6 8	4 5 6	3	1 2 4 6	7	1 2 4 5 6	9
1 3 5 9	4	1 5 6 9	5 6 7 9	1 5 6 7	8	1 2 3 6	1 2 5 6	1 3 5 6
2	5 6 8 9	7	4 5 6 9	1 4 5 6	1 4 6 9	1 3 4 6 8	1 4 5 6	1 3 4 5 6
7	3	4 2	4 6 7	9	5	1 4 6	8	1 4 6 7
6	5 8 9	4 5 8 9	3 4 7	1 4 7	1 3 4 7	1 4 9	1 4 5 7	2
5 7 9	1	4 5 9	2	8	4 6 7	4 6 9	3	4 5 6 7
1 3 7 9	2 6 7 9	1 2 6 9	3 4 6 7 9	3 4 6 7	3 4 6 7 9	5	1 2 4 6 7	8
5 7 8	5 6 7 8	5 6 8	1	4 5 6 7	4 6 7	2 3 4 6	9	3 4 6 7
4	5 6 7 8 9	3	5 6 7 8 9	2	6 7 9	1 6	1 7 6	1 7 6

Abbildung 7: Beispiel-Sudoku – Angabe der möglichen Ziffern für jedes Kästchen.

werden durch Angabe der Zeilennummer (von oben nach unten gezählt) und der Spaltennummer (von links nach rechts) numeriert. So bedeutet das Ziffern paar (7,2) das zweite Kästchen in der siebten Zeile. Steht in der Tabelle die Bemerkung „einz. Mögl.“ so heißt das, daß für das betreffende Kästchen nur noch eine Möglichkeit für eine Ziffer besteht, so wie eben bei der 7 in der Position (4,1). Die Bemerkung „Quadrat“ bedeutet, daß in einem 3×3 -Quadrat eine Ziffer nur ein einziges Mal auftaucht, so wie eben die 2 in (1,6). Ähnlich bedeutet „Zeile“, daß eine Ziffer in einer Zeile nur einmal vorkommt, ganz analog ist die Bedeutung von „Spalte“.

Es braucht wohl nicht eigens erwähnt zu werden, daß nach jeder neu gefundenen endgültigen Ziffer unser Computer weitere Ziffern in den noch offenen Kästchen löschen kann. Dies wird hier nicht dargestellt, das wäre dann doch zu langweilig.

In Abbildung 8 ist der Zustand des Sudoku nach dem achtzehnten Schritt dargestellt. Wir sehen uns hier die letzten vier Kästchen in der neunten Zeile an und wenden die Sherlock-Holmes-Methode auf das Kästchen (9,6) an. Würde dort die Ziffer 1 stehen, dann blieben für die verbleibenden drei Felder nur die beiden Ziffern 6 und 7. Nur zwei Ziffern für drei Felder, das ist unmöglich. Ähnlich, wenn im Feld (9,6) die Ziffer 6 stände, Dann hätte man nur die beiden Ziffern 1 und 7 für die verbleibenden drei Felder. Es folgt nach Sherlock Holmes, daß in (9,6) eine 9 stehen muß.

In der vierten Zeile kann keine 7 stehen, da bereits in (4,1) eine steht. Ebenso kann in Spalte 7 keine 7 stehen. Das heißt aber, daß im mittleren Quadrat eine 7 nur in (5,4) oder in (5,5) stehen darf. Nun betrachten wir das benachbarte Quadrat. In der Zeile 5 darf keine 7 stehen, wie wir eben gesehen haben, auch nicht in der Zeile 6. In der Spalte 7 darf auch keine 7 stehen. Damit verbleibt für das letzte Quadrat in der Mitte nur die Position (6,9) für die 7. Wir erhalten damit die Schrittfolge in Tabelle 2.

Die Situation nach dem 23. Schritt ist in Abbildung 9 dargestellt. Von nun ab geht alles recht einfach. In einem der Felder (1,1) und (1,3) muß eine 5 stehen, denn in Zeile 2 und in Spalte 2

Nr.	Ziffer	Position		Bemerkungen
1	7	4	1	einzel. Mögl.
2	2	1	6	Quadrat
3	3	2	1	Quadrat
4	8	3	7	Quadrat
5	2	4	3	Quadrat
6	8	9	4	Quadrat
7	3	3	9	Quadrat
8	3	8	7	Quadrat
9	2	7	8	Quadrat
10	4	8	9	Quadrat
11	5	8	5	Quadrat
12	2	8	2	Quadrat
13	8	8	1	einzel. Mögl.
14	6	8	3	einzel. Mögl.
15	7	8	6	einzel. Mögl.
16	2	2	7	Quadrat
17	7	7	2	Quadrat
18	5	9	2	Quadrat

Tabelle 1: Die ersten achtzehn Schritte des Times-Sudoku.

Nr.	Ziffer	Position		Bem.
19	9	9	6	siehe oben
20	7	6	9	siehe oben
21	5	5	8	Quadrat
22	7	9	8	Quadrat
23	5	2	9	Quadrat

Tabelle 2: Die Schritte 19–23 des Times-Sudoku.

darf sich keine 5 befinden. Damit muß in (3,4) eine 5 stehen, denn in der ersten und der zweiten Zeile sowie in der fünften und der sechsten Spalte befindet sich je eine 5. Der Rest ist in Tabelle 3 dargestellt, und in Abbildung 10 findet man die Lösung.

Diese Skizze eines Programmentwurfs ist natürlich noch nicht vollständig. Beim vorliegenden Sudoku hat es geklappt, es bleiben aber noch Fragen offen. Gerade diese Fragen sind es, die uns Mathematiker interessieren. Wer interessiert ist, findet in der Literatur Anregungen für die weitere Beschäftigung mit Sudokus [6, 5]. Auch das Internet bietet eine große Zahl von Beiträgen zu dem Thema an. Einige dieser interessanten Fragen wären etwa:

- Wie findet man ein lösbares Sudoku?
- Wie stellt man fest, daß es nicht noch weitere Lösungen gibt? Es ist nicht erwünscht, daß es mehrere verschiedene Lösungen gibt. Normalerweise ist in den Zeitschriften die Lösung des Sudokus angegeben, und es wäre sehr verwirrend, wenn man eine Lösung gefunden hätte, diese aber von der angegebenen Lösung verschieden wäre. Man würde sich dann fragen

				3	2	7		9
3	4				8	2		
2		7				8		3
7	3	2		9	5		8	
6								2
	1		2	8			3	
	7					5	2	8
8	2	6	1	5	7	3	9	4
4	5	3	8	2	$\frac{16}{9}$	16	$\frac{16}{7}$	$\frac{16}{7}$

Abbildung 8: Beispiel-Sudoku – Zustand nach dem achtzehnten Schritt.

müssen, ob man nicht irgend etwas übersehen hat.

- Wie gelangt man zu sinnvollen Vorgaben? Gibt man zu viele Ziffern vor, dann wird das Sudoku zu leicht. Wenn man zu wenige vorgibt, dann könnte es sein, daß es mehrere Lösungen gibt.
- Man kann aus einem lösbaren Sudoku ein neues lösbares Sudoku erzeugen, indem man etwa die erste und die zweite Zeile vertauscht. Eine typisch mathematische Frage wäre: Welche Operationen mit einem lösbaren Sudoku führen wieder auf ein lösbares Sudoku.
- Schließlich gibt es noch die interessante Frage: Wieviele eindeutig lösbare Sudokus gibt es? Genauer: Wieviele verschiedene gelöste Sudokus gibt es, denn man kann ja zu dem gleichen ausgefüllten Sudoku-Schema verschiedene Vorgaben angeben. Man hat ausgerechnet, daß es 6 670 903 752 021 072 936 960 verschiedene Sudokus gibt. Wenn man unter diesen nur diejenigen zählt, die wirklich voneinander verschieden sind, die also nicht durch Operationen der eben angedeuteten Art ineinander überführt werden können, dann verbleibt immer noch eine Anzahl von 5 472 730 538 Sudokus [6].
- Man findet in den Zeitungen noch Sonderformen von Sudokus, und es gibt eine Anzahl ähnlicher Spiele, wie etwa magische Quadrate oder lateinische Quadrate [6]. Es gibt also für uns Mathematiker noch genügend zu spielen!

3 Ein Zwerg verschwindet

Es gibt ein hübsches altes Zauberkunststück, welches von dem Magier Alexander Adrion beschrieben wird [2, S. 240]. Auf einem Bild befinden sich 15 Zwerge. Wenn man das Bild auf geeignete Weise in drei Teile zerschneidet und diese anders wieder zusammensetzt, dann bleiben nur noch 14 Zwerge. Einer der Zwerge ist verschwunden! Alexander Adrion diskutiert in seinem Buch verschiedene Lösungsvorschläge, aber keiner davon ist wirklich stichhaltig. Er schreibt dann:

				3	2	7		9
3	4				8	2		5
2		7				8		3
7	3	2		9	5		8	
6				7			5	2
	1		2	8			3	7
	7					5	2	8
8	2	6	1	5	7	3	9	4
4	5	3	8	2	9		7	

Abbildung 9: Beispiel-Sudoku – Zustand nach dem 23. Schritt.

Erscheinen und Verschwinden gehören zum Urbestand jeden Zauberspiels – deshalb ist dieses Zwergen-Puzzle durchaus magisch.

Und sollten Sie das Geheimnis nicht enträtseln können, befinden Sie sich in der allerbesten Gesellschaft anderer nachdenklicher Menschen, denen es ähnlich wie Ihnen ergeht.

Wir Mathematiker versuchen immer, ein Problem auf möglichst einfache Weise zu formulieren – wir sind einfache Menschen – sonst haben wir keine Chancen, es zu verstehen. Betrachten wir einmal anstelle der Zwerge Linien (siehe [8, S. 136]). In der linken Abbildung 11 sind elf senkrechte rote Linien eingezeichnet. Wenn wir das berandende Rechteck, wie durch die gestrichelte Linie angedeutet, diagonal zerschneiden und dann die untere Hälfte längs der Schnittlinie um einen Linienabstand nach links unten verschieben, dann ist alles klar! Eine Linie – die äußerste rechte – ist „verschwunden“, dafür sind alle anderen Linien ein Stück länger geworden. Hier ist also alles ganz offensichtlich.

Nun, da wir schon einmal eine Linie zum Verschwinden gebracht haben, werden wir mutiger. Wir zeichnen ein neues Bild, in dem die diagonale Schnittlinie durch eine horizontale ersetzt ist. Weiterhin ordnen wir die Linien nicht mehr der Größe nach an, denn dann merkt ja jeder den Trick gleich. Wir mischen die Linien also geschickt. Das ist nicht ganz einfach, man muß eben ein wenig probieren und nachdenken. In der linken Abbildung 12 sind zehn Balken dargestellt. Wenn man die Abbildung längs der dünnen Linien zerschneidet und die beiden oberen Teile vertauscht, dann erhält man die in der rechten Abbildung 12 dargestellte Anordnung von Balken. Hier sind es aber nur noch neun Balken, ein Balken ist verschwunden!

Hier ist es auch nicht schwierig, auf den Trick zu kommen. Wenn Ihr in der linken Abbildung 12 den ersten und den vierten Balken von links ansieht und wenn Ihr Euch überlegt, was aus ihnen wird, dann wird die Sache schon klarer.

Eine hübsche Variante des Problems des verschwindenden Zwerges stammt von Mel Stover [8, S. 148]. Dieses Spiel ist in Abbildung 13 dargestellt. Auch hier muß man das vorgegebene Bild entlang der eingezeichneten Linien zerschneiden. Setzt man das Bild einmal so zusammen, wie in der rechten Bildhälfte angedeutet ist, und dann so, wie in der linken Hälfte gezeigt wird, dann

Nr.	Ziffer	Position	Bem.	Nr.	Ziffer	Position	Bem.
24	5	3 4	siehe oben	42	6	7 6	Spalte
25	9	2 4	Quadrat	43	4	7 5	Quadrat
26	7	2 5	Quadrat	44	6	2 8	Zeile
27	7	5 4	Quadrat	45	4	3 8	Zeile
28	3	5 6	Quadrat	46	1	1 8	Zeile
29	1	5 5	Quadrat	47	9	6 1	einz. Mögl.
30	3	7 4	Quadrat	48	6	6 7	einz. Mögl.
31	1	3 6	Spalte	49	5	6 3	Zeile
32	1	2 3	einz. Mögl.	50	1	7 1	Spalte
33	9	3 2	Quadrat	51	9	7 3	Zeile
34	8	5 2	Spalte	52	6	6 7	Zeile
35	6	1 2	Spalte	53	4	5 3	Quadrat
36	5	1 1	einz. Mögl.	54	9	5 7	Zeile
37	8	1 3	einz. Mögl.	55	4	4 7	Quadrat
38	4	1 4	Zeile	56	1	4 9	Quadrat
39	6	3 5	Quadrat	57	6	9 9	Zeile
40	6	4 4	Spalte	58	1	9 7	
41	4	6 6	Quadrat				

Tabelle 3: Die Schritte 24–58 des Times-Sudoku.

hat ein Bleistift die Farbe gewechselt. Hier ist der „Übeltäter“ leicht zu finden. Sehr Euch einmal den vierten Bleistift von links in beiden Teilbildern an!

4 Topologische Spiele

Die *Topologie* ist eines der schwierigsten aber auch eines der schönsten Gebiete der Mathematik. Sie ist nicht nur für Mathematiker interessant, sondern auch für Physiker, die wichtigsten Probleme der Stringtheorie haben einen topologischen Hintergrund. Grob gesagt, gehören zur Topologie alle Fragen, die nichts mit den genauen Abmessungen eines Objekts zu tun haben, sondern nur mit der gegenseitigen Lage seiner Teile. Es ist bekannt, daß man einen Fußball aus Sechsecken und aus Fünfecken herstellen kann. Man muß sich fragen, warum Fußbälle nicht nur aus Fünfecken oder ausschließlich aus Sechsecken hergestellt werden können. Das wäre doch schließlich einfacher. Es ist ein nicht ganz einfaches und altes Resultat der Topologie, welches auf den berühmten Mathematiker Leonhard Euler zurückgeht (er lebte von 1707 bis 1783). Euler konnte zeigen, daß man einen Fußball auf keine Weise aus Sechsecken oder aus Fünfecken zusammennähen kann. Wir wollen uns hier zwei einfacheren Problemen zuwenden.

4.1 Möbius-Bänder

Mit einem einfachen Papierstreifen, etwas Leim und einer Schere kann man interessante mathematische Experimente ausführen. Wir betrachten einen langen Streifen aus Papier, wie etwa in Abbildung 14 angegeben. Man kann aus diesem Streifen zunächst einen Ring kleben, indem man die mit A bezeichnete Ecke auf die Rückseite der mit D bezeichneten Ecke und die Ecke B auf die Rückseite der Ecke C klebt. Wenn man diesen Ring längs der Mittellinie (in der Abbildung

5	6	8	4	3	2	7	1	9
3	4	1	9	7	8	2	6	5
2	9	7	5	6	1	8	4	3
7	3	2	6	9	5	4	8	1
6	8	4	7	1	3	9	5	2
9	1	5	2	8	4	6	3	7
1	7	9	3	4	6	5	2	8
8	2	6	1	5	7	3	9	4
4	5	3	8	2	9	1	7	6

Abbildung 10: Beispiel-Sudoku – Lösung.

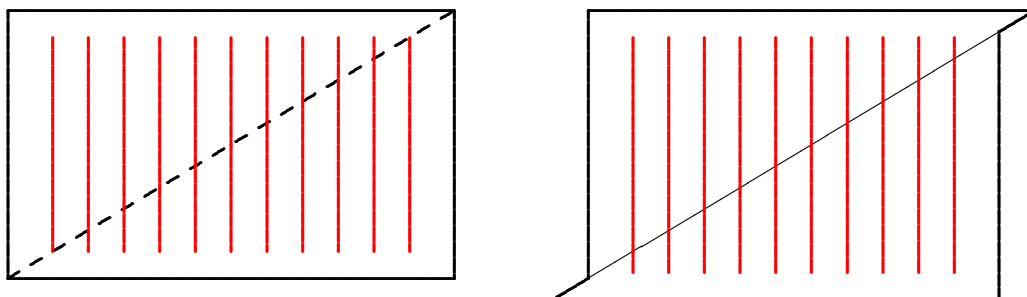


Abbildung 11: Eine Linie verschwindet.

gestrichelt gezeichnet) aufschneidet, dann erhält man zwei Ringe halber Breite. Dies ist schon so klar, daß man darüber nicht zu reden braucht.

Nun drehen wir das Papierband vor dem Zusammenkleben um eine halbe Drehung, das heißt, die Ecke A kommt jetzt direkt auf C und B kommt auf D. Man erhält ein Gebilde, das wie in Abbildung 15 aussieht. Ein solches Band wird von den Mathematikern als *Möbiusband* bezeichnet nach dem Mathematiker und Astronomen August Ferdinand Möbius (1790 – 1868). Wenn man dieses Band längs der Mittellinie aufschneidet, dann erhält man überraschenderweise nicht zwei halbe Bänder, sondern ein einziges Band, welches allerdings doppelt gedreht ist.

Wenn man sich das Möbiusband vor dem Zerschneiden genau ansieht, dann stellt man fest, daß es nur eine Seite hat. Man kann von einem beliebigen Punkt aus zu jedem anderen auf dem Band gelangen, indem man längs des Bandes entlangwandert, ohne dabei die Ränder zu überschreiten.

Man kann noch zahlreiche weitere Experimente mit überraschendem Ausgang mit solchen Bändern machen. Wenn Ihr das versuchen möchtet, solltet Ihr das Papierband recht lang machen, sonst gibt es Schwierigkeiten beim Zusammenkleben. Einige Beispiele für Experimente:

- Was geschieht, wenn man das ursprüngliche Möbiusband, nachdem man es längs der Mittellinie zerschnitten hat, noch einmal längs der Mittellinie zerschneidet?

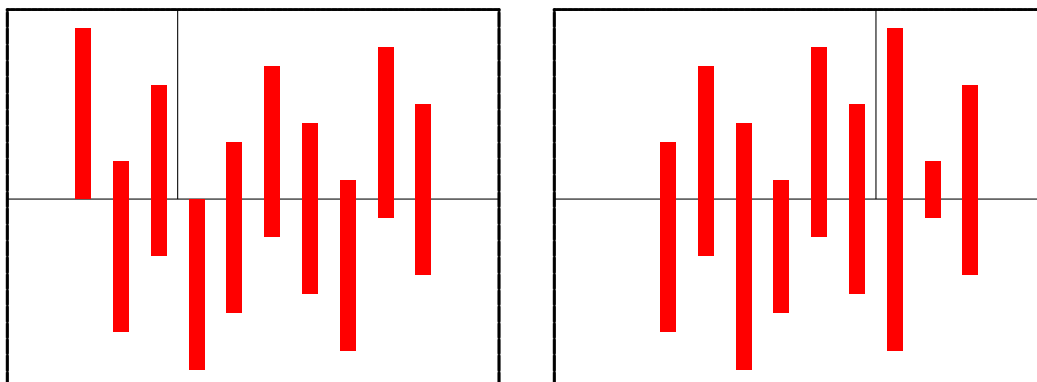


Abbildung 12: Ein Balken verschwindet.

- Was geschieht, wenn man vor dem Zusammenkleben den Papierstreifen nicht ein halbes Mal sondern ein ganzes Mal verdreht? Dann kommt wieder die Ecke A auf die Rückseite der Ecke D und die Ecke B auf die Rückseite von C.
- Was geschieht, wenn man vor dem Zusammenkleben das Band anderthalbmals, zweimal, ... dreht?

4.2 Irrgärten

In dem Buch *Harry Potter und der Feuerkelch* nimmt Harry Potter am trimagischen Turnier teil. Als dritte Aufgabe muß er sich in einem Irrgarten zurechtfinden [14, S. 633 ff]. Wir Mathematiker lieben Irrgärten aus verschiedenen Gründen, und ich möchte noch einige Worte über Irrgärten sagen.

In Abbildung 16 ist ein sehr einfacher Irrgarten dargestellt. Es ist hier nicht schwierig, den Weg vom Start zum Ziel zu finden. Eine einfache Regel, die man oft in Artikeln über Irrgärten findet, ist es, im Zweifel immer in eine bestimmte Richtung abzubiegen, das heißt entweder, an jeder Verzweigung grundsätzlich die rechte Möglichkeit zu wählen oder aber immer die linke. In Abbildung 17 ist die letztgenannte Möglichkeit dargestellt.

Diese „Strategie“, im Zweifel immer links zu gehen, funktioniert aber nicht immer. Es gibt Irrgärten, bei denen man auf diese Weise nicht zum Ziel kommt. Einer dieser Irrgärten ist das sogenannte Heckenlabyrinth von Chevening in der englischen Grafschaft Kent [15]. In Abbildung 18 ist dieser komplizierte Irrgarten (oder Labyrinth) dargestellt. Ihr könnt, bevor Ihr weiterlest, einmal versuchen, den Weg vom Start zum Ziel zu finden.

Wählen wir die Strategie „immer links“, die uns bei dem einfachen Irrgarten so gut geholfen hat, dann kommen wir wieder aus dem Labyrinth heraus, ohne den Zielpunkt gefunden zu haben (Abbildung 19). Ähnlich ergeht es uns, wenn wir die Strategie „immer rechts“ wählen. Daß es tatsächlich einen Weg vom Start zum Ziel gibt, sieht man in Abbildung 20.

Was macht dieses Heckenlabyrinth so kompliziert? In Abbildung 21 sind einmal die zusammenhängenden Stücke der begrenzenden Hecke farbig unterschieden. Man sieht, daß die Hecke aus sieben

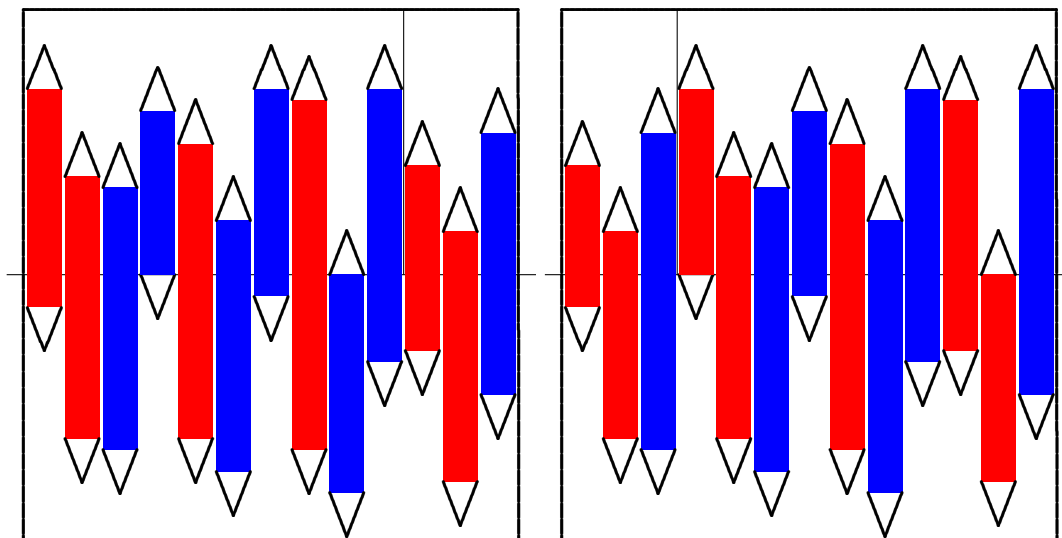


Abbildung 13: Ein Bleistift wechselt seine Farbe.

Teilen oder „Inseln“ besteht. Wendet man die Strategie „immer links“ oder auch „immer rechts“ an, dann umrundet man den in der Abbildung violett dargestellten Teil und gelangt niemals zu dem schwarz dargestellten Teil der Hecke, in dem ja das Ziel liegt.

Übrigens: Auch für solch komplizierte Irrgärten wie das Heckenlabyrinth von Chevening gibt es Methoden, von Start zum Ziel (und wieder zurück) zu kommen. Solche Methoden sind natürlich etwas komplizierter als die geschilderte einfache Strategie. Wer sich dafür interessiert, kann in dem allgemeinverständlichen Artikel von Jearl Walker [15] nachlesen.

Literatur

- [1] *Natürliches Zauber-Buch Oder: Neu-eröffneter Spiel-Platz rarer Künste / in welchem nicht allein alle Taschen-Spieler- und andere curiöse Mathematische und Physicalische Künste sondern auch die gebräuchlichen Karten-Würffel Billard und andere Spiele, aufs genaueste beschrieben, und mit vielen Figuren erläutert werden. Mit Königl. Pohlnisch und Churf. Sächs. Privilegio.* Bey Adam Stein und Gabriel Nicolaus Raspe, Nürnberg, 1745.
- [2] Alexander Adrion. *Die Kunst zu zaubern. Mit einer Sammlung der interessantesten Kunststücke zum Nutzen und Vergnügen für jedermann.* dumont taschenbücher Nr. 1680. DuMont Buchverlag, Köln, 2. Auflage, 1990.
- [3] Lewis Carroll. *Die Alice-Romane. Alices Abenteuer im Wunderland. Durch den Spiegel und was Alice dort fand. Mit den Illustrationen von John Tenniel, Übersetzt und herausgegeben von Günther Flemming.* Philipp Reclam jun., Stuttgart, 2002.
- [4] J. H. Conway and R. K. Guy. *Zahlenzauber. Von natürlichen, imaginären und anderen Zahlen. Aus dem Amerikanischen von Manfred Stern.* Birkhäuser Verlag, Basel · Boston · Berlin, 1997.

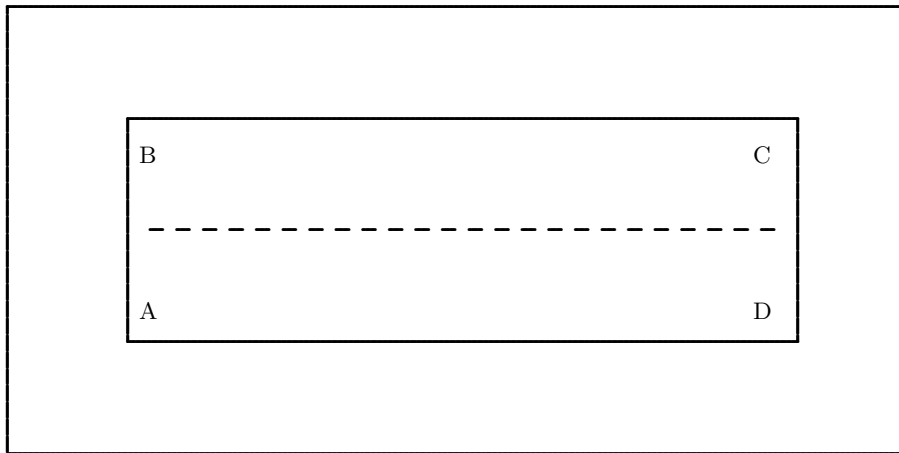


Abbildung 14: Der Papierstreifen vor dem Zusammenkleben.

- [5] Jean-Paul Delahaye. Mathematische Unterhaltungen: Sudoku oder die einsamen Zahlen. *Spektrum der Wissenschaft*, März 2006, S. 100–106.
- [6] Ch. Elsholtz and A. Mütze. Sudoku im Mathematikunterricht. *Mathematische Semesterberichte*, 54:69–93, 2007.
- [7] Martin Gardner. *Mathematisches Labyrinth. Neue Probleme für die Knobelgemeinde*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1979.
- [8] Martin Gardner. *Mathematik und Magie. 115 Karten- Würfel- und Dominotricks, mathematische Spiele und Zauberkunststücke, Vorwort von Alexander Adrion*. dumont taschenbücher Nr. 106. DuMont Buchverlag, Köln, 1981.
- [9] Dominic Olivastro. *Das chinesische Dreieck. Die kniffligsten mathematischen Rätsel aus 10 000 Jahren. Aus dem Amerikanischen von Michael Schmidt*. Dromersche Verlagsanstalt Th. Knaur Nachf., München, 1995.
- [10] Gay Robins and Charles Shute. *The Rhind Mathematical Papyrus, an ancient Egyptian text*. The Trustees of the British Museum, London, 1987.
- [11] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und der Stein der Weisen. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 1998.
- [12] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und der Gefangene von Askaban. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 1999.
- [13] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und die Kammer des Schreckens. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 1999.
- [14] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und der Feuerkelch. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 2000.
- [15] Jearl Walker. Experiment des Monats: Labyrinthwandern mit Methode: Wie man sich in einem Irrgarten zurechtfindet und ohne rettenden Ariadne-Faden wieder herausgelangt. *Spektrum der Wissenschaft*, Februar 1987, S. 144–149.

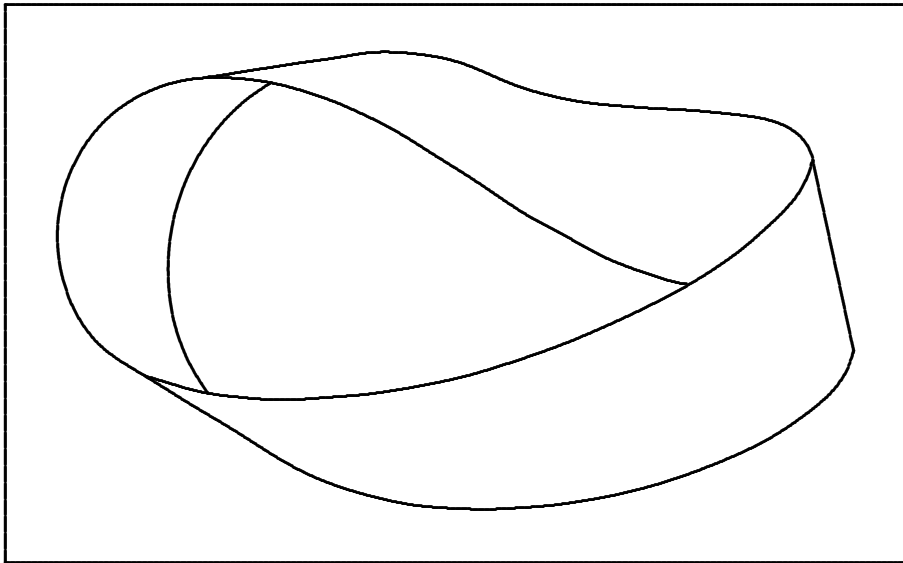


Abbildung 15: Das zusammengeklebte Möbiusband.

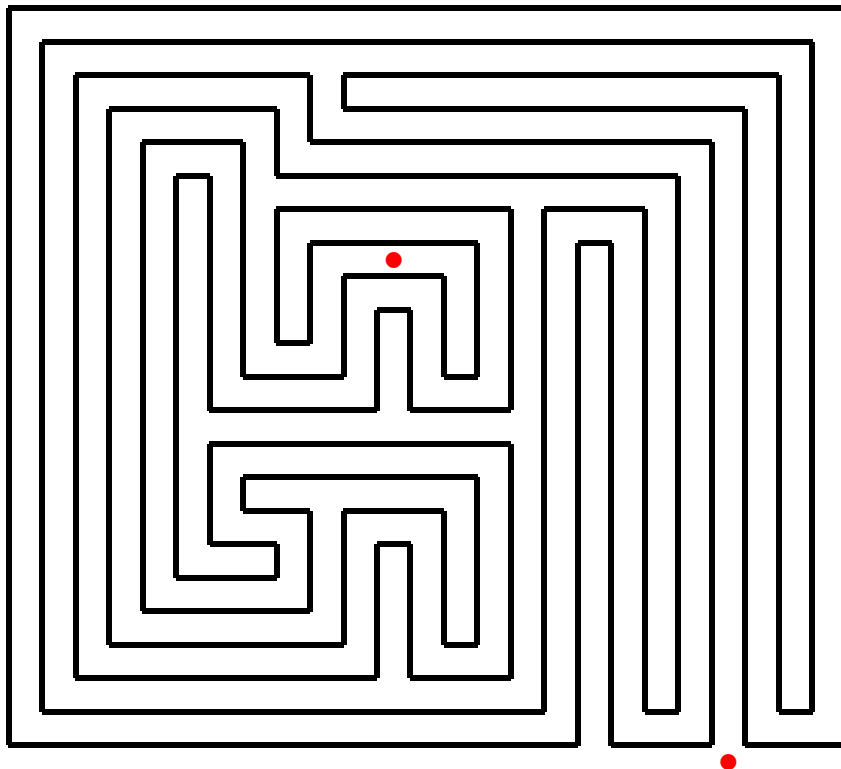


Abbildung 16: Ein einfacher Irrgarten – Start und Ziel sind durch je einen roten Punkt markiert.

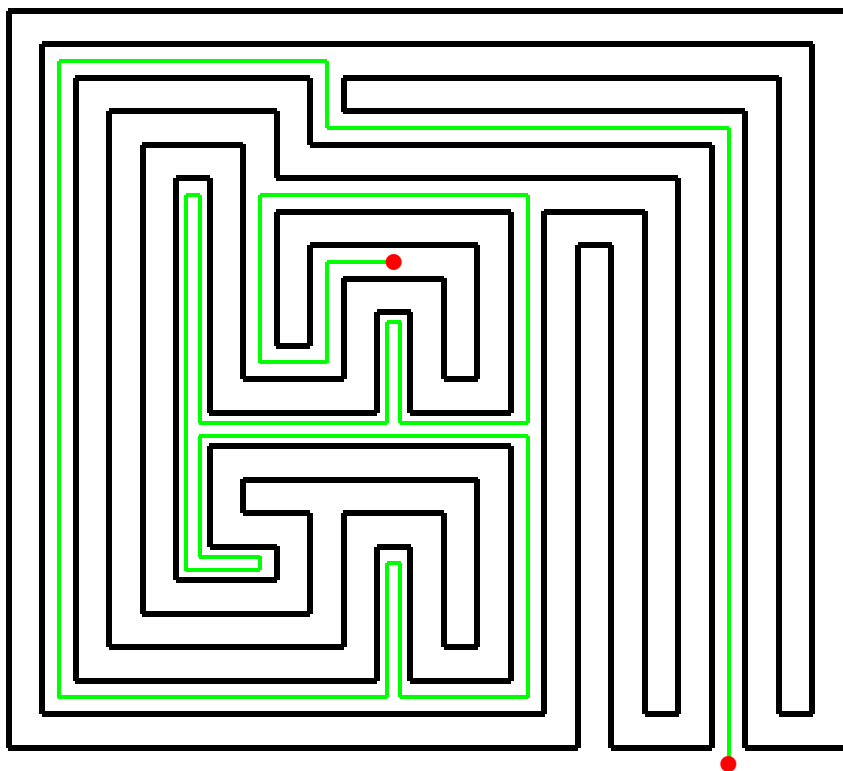


Abbildung 17: Ein einfacher Irrgarten – Anwendung der Regel „immer links“.

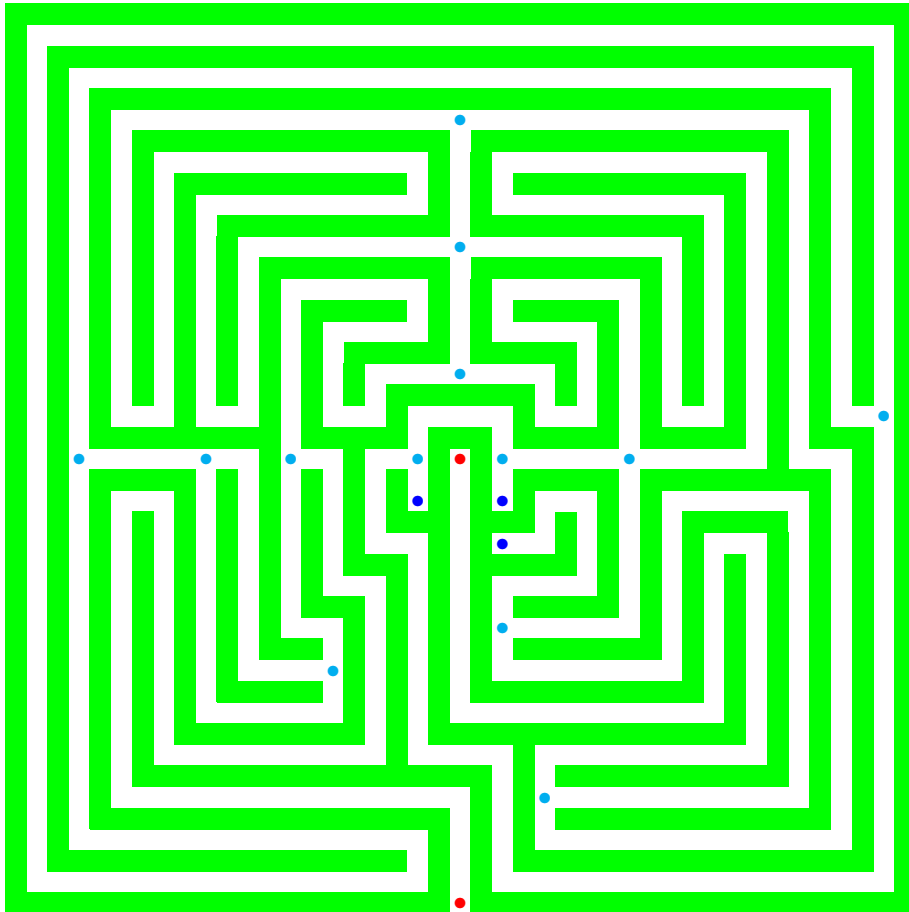


Abbildung 18: Das Heckenlabyrinth von Chevening in der Grafschaft Kent (England).

Start- und Zielpunkt sind **rot** markiert.

Endpunkte von Sackgassen sind **blau** gekennzeichnet.

Hellblaue Markierungen bezeichnen Punkte, an denen eine Entscheidung für einen von mehreren möglichen Wegen notwendig ist.

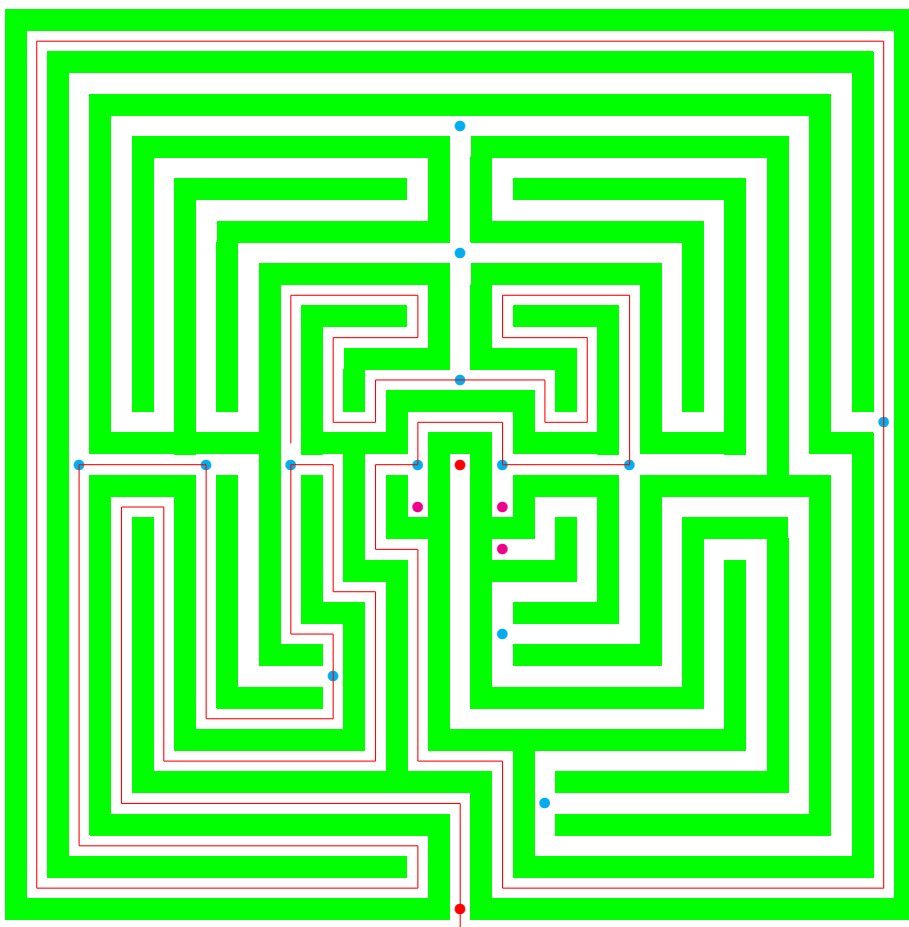


Abbildung 19: Das Heckenlabyrinth von Chevening.

Strategie „immer links“.

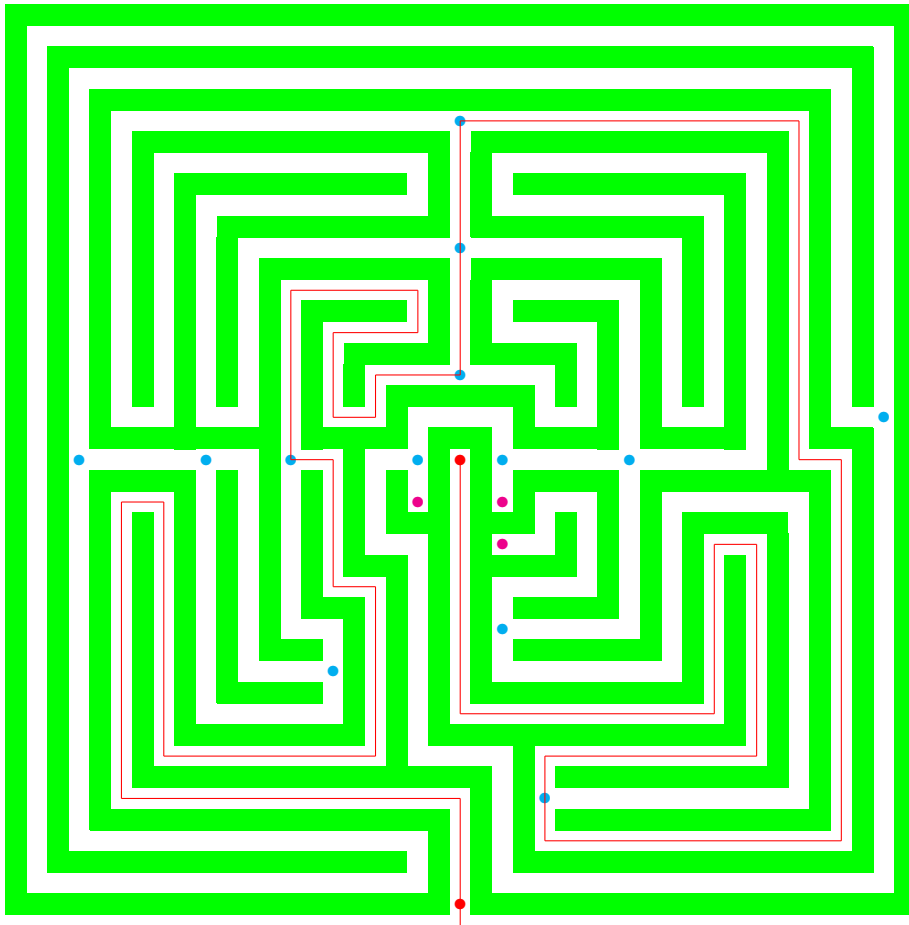


Abbildung 20: Das Heckenlabyrinth von Chevening.

Ein Weg zum Ziel.

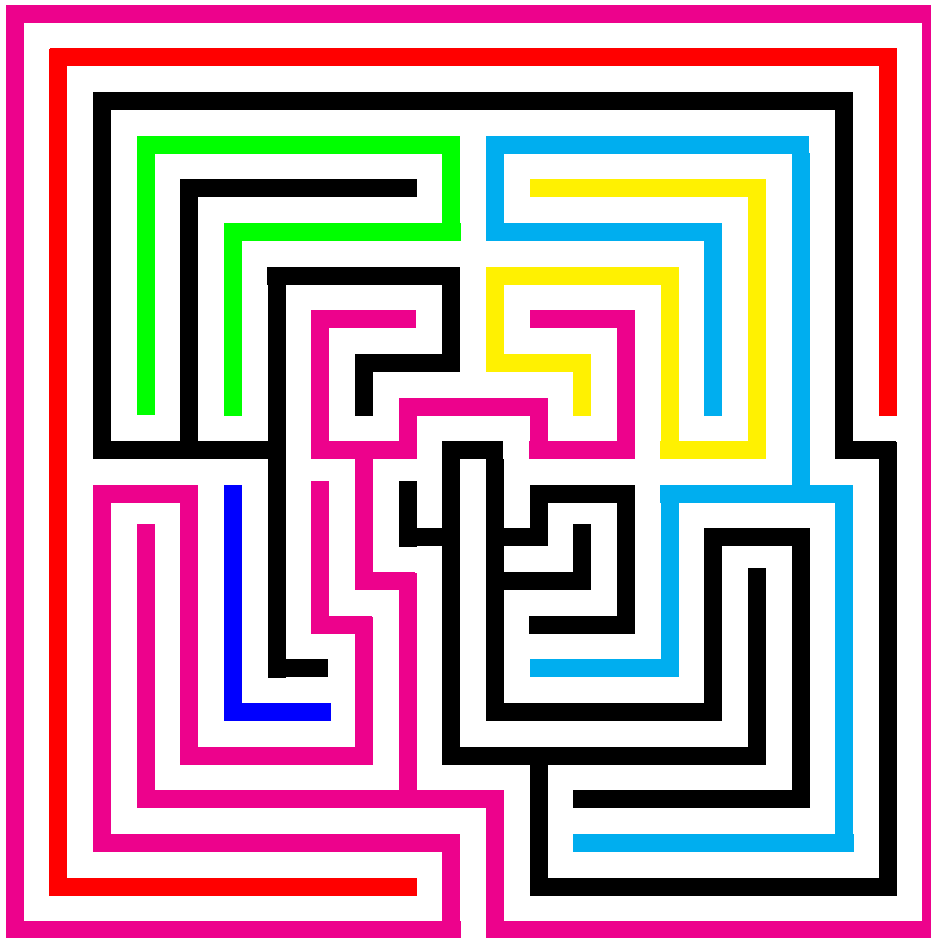


Abbildung 21: Das Heckenlabyrinth von Chevening.

Die sieben zusammenhängenden Teile („Inseln“) des Labyrinths.